# Posloupnosti a řady

### Definice

* funkce, jejímž definičním oborem **D** jsou buď
  + **všechna přirozená čísla** (Popis: \mathbb{N}) – nekonečná posloupnost
  + nebo libovolná **podmnožina přirozených čísel** (*n*) – konečná posloupnost
* každému **n ∈ N** přiřazuje číslo **an ∈ R**
* záleží na pořadí prvků
* prvky se mohou v posloupnosti opakovat
* příklad posloupnosti: 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

### Zápis posloupnosti

* posloupnost obvykle pojmenováváme malým písmenem s dolním indexem – *an*
* **výčet všech hodnot posloupnosti** (může být konečný i nekonečný)

*ak = (1, 2, 3, 4, 5)*

*an = (2, 4, 6, 8, 10, …)*

* **vzorec pro n-tý člen posloupnosti**

*an = 2n* (všechna sudá čísla)

* + dolní index n nám určuje, kolikátý prvek posloupnosti zrovna počítáme, např. výpočet sedmého prvku:

*a7 = 2 × 7 = 14*

* **rekurentní definice (induktivní definice)**
  + umožňuje vypočítat následující člen, pokud známe ten současný (známe-li prvek *an*, umožňuje nám spočítat prvek *an+1*)
  + vždy zadáváme první prvek (je možné zadat i více prvků) a předpis pro vypočítání *n-*tého prvku pomocí jednoho nebo několika předchozích prvků, např.

*a1 = 2*

*an+1 = an + 2*

* + hodí se pro výpočet větší části posloupnosti
  + nehodí se pro výpočet konkrétního prvku (pro výpočet 75. členu musíme znát všech 74 předcházejících)
  + průběh výpočtu

*a1 = 2*

*a2 = a1 + 2 (=4)*

*a3 = a2 + 2 (=6)*

*a4 = a3 + 2 (=8)*

*…*

##### Příklad: Fibonacciho posloupnost

* nekonečná posloupnost přirozených čísel začínající 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
* každé číslo je součtem dvou předchozích
* rekurzivní definice:

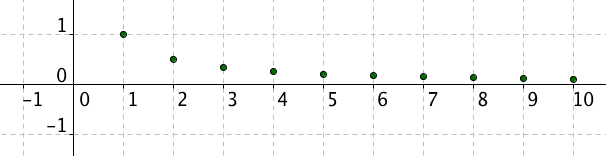
*a0 = 0*

*a1 = 1*

*an = an−1 + an−2*

### Graf posloupnosti

* grafem posloupnosti je vždy **množina izolovaných bodů**



Obr. 1 Graf posloupnosti an = 1/n

### Speciální druhy posloupností

##### Aritmetická posloupnost

* mezi jednotlivými členy posloupnosti stálý rozdíl – **diference (*d*)**
* každý člen posloupnosti (kromě prvního) je aritmetickým průměrem „svých sousedů“
* obecný zápis: *an + 1 = an + d*
* výpočet *n*-tého členu: *an = a1 + (n - 1)d*
* příkladem je posloupnost sudých čísel

##### Geometrická posloupnost

* dva sousední členy nemají stejný rozdíl, ale podíl – **kvocient (*q*)**
* obecný zápis: *an + 1 = an × q*
* výpočet *n*-tého členu: *an = a1 × qn-1*
* například posloupnost, kde q = 10 a první prvek je 5:

*a1 = 5*

*a2 = a1 × 10 (=50)*

*a3 = a2 × 10 (=500)*

*a4 = a3 × 10 (=5000)*

*…*

### Příklady

1) Induktivně definuj nekonečnou posloupnost 1, 3, 5, 7, 9, …

Řešení: an = an-1 + 2, a1 = 1

2) Induktivně definuj nekonečnou posloupnost 2, 5, 11, 23, 47, …

2) an = 2an-1 + 1, a1 = 2

Řešení příkladů: